О решении уравнений вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

М.К. Потапов, А.В. Шевкин

На вступительных экзаменах в вузы и на олимпиадах иногда предлагают решить уравнение, которое можно записать в виде

$$\varphi(\varphi(x)) = x, \qquad (А)$$

где $\varphi(x)$ — некоторая функция.

Например, уравнения

$$(x^2 - 5x + 5)^2 - 5(x^2 - 5x + 5) + 5 = x, \qquad (а)$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}+24} = x, \qquad (б)$$

$$\sin(\sin x) = x, \qquad (в)$$

$$\sqrt{6-2\sqrt{6-2x}} = x \qquad (г)$$

есть уравнения вида (А). Действительно, в случае (а) $\varphi(x) = x^2 - 5x + 5$, в случае (б) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+24}$, в случае (в) $\varphi(x) = \sin x$, в случае (г) $\varphi(x) = \sqrt{6-2x}$.

Наряду с уравнением (А) можно рассмотреть уравнение

$$\varphi(x) = x. \qquad (Б)$$

Так как, очевидно, что уравнение (Б) проще уравнения (А), то надо попытаться использовать это обстоятельство для решения уравнения (А). Ниже будут приведены утверждения, которые можно применять при решении уравнений вида (А), используя более простые уравнения вида (Б).

Утверждение 1. Любой корень уравнения (Б) является корнем уравнения (А).

В самом деле. Пусть число x_0 является корнем уравнения (Б). Тогда справедливо числовое равенство $\varphi(x_0) = x_0$. Используя это равенство два раза, получаем, что $\varphi(\varphi(x_0)) = \varphi(x_0) = x_0$, т. е. $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$. А это и означает, что число x_0 является корнем уравнения (А). Утверждение 1 доказано.

Отметим, что здесь и далее рассматриваются только действительные корни уравнений.

Утверждение 2. Пусть функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X и пусть $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, тогда уравнения (А) и (Б) равносильны на множестве X. (Множество X может совпадать с областью существования функции $\varphi(x)$ или быть ее частью.)

Как показано выше, любой корень уравнения (Б) является корнем уравнения (А). Покажем теперь, что если функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, то любой корень уравнения (А), принадлежащий множеству X, является корнем уравнения (Б).

Пусть число $x_0 \in X$ и является корнем уравнения (А), тогда справедливо числовое равенство $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$. Докажем, что тогда справедливо и числовое равенство $\varphi(x_0) = x_0$.

Предположим противное, т. е. что $\varphi(x_0) \neq x_0$. Тогда если $\varphi(x_0) > x_0$, то, учитывая, что $\varphi(x_0) \in X$ и $x_0 \in X$, в силу возрастания функции $\varphi(x)$ на множестве X получим, что справедливо числовое неравенство $\varphi(\varphi(x_0)) > \varphi(x_0)$. Откуда, используя числовое неравенство $\varphi(x_0) > x_0$, получим, что $\varphi(\varphi(x_0)) > x_0$, а это противоречит условию $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$.

Если же $\varphi(x_0) < x_0$, то, учитывая, что $\varphi(x_0) \in X$ и $x_0 \in X$, в силу возрастания функции $\varphi(x)$ на множестве X получим, что справедливо числовое неравенство $\varphi(\varphi(x_0)) < \varphi(x_0)$. Откуда получим, что $\varphi(\varphi(x_0)) < x_0$, а это противоречит условию $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$.

Следовательно, предположение, что $\varphi(x_0) \neq x_0$ неверно и справедливо равенство $\varphi(x_0) = x_0$, т. е. число x_0 является корнем уравнения (Б).

Если же хотя бы одно из уравнений (А) и (Б) не имеет корней, принадлежащих множеству X, то и другое уравнение не имеет корней, принадлежащих множеству X.

Действительно, пусть уравнение (Б) не имеет корней, принадлежащих множеству X. Тогда если предположить, что уравнение (А) имеет корень $x_0 \in X$ и $\varphi(x_0) \in X$, то, как показано выше, и уравнение (Б) имеет тот же корень, а это противоречит условию, что уравнение (Б) не имеет корней. Аналогично, но со ссылкой на утверждение 1, доказывается, что если уравнение (А) не имеет корней, принадлежащих множеству X, то и уравнение (Б) не имеет корней, принадлежащих множеству X.

Утверждение 2 доказано полностью.

Отметим, что если функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, то уравнения $\varphi(x) = x$, $\varphi(\varphi(x)) = x$, $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x$ и т. д. равносильны на множестве X.

Естественно возникает вопрос: справедливо ли утверждение, аналогичное утверждению 2, но для строго убывающей функции $\varphi(x)$?

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x}$, она строго убывает на множестве **R** и $\varphi(x_0) \in \mathbf{R}$ для любого $x_0 \in \mathbf{R}$. Уравнение $\varphi(x) = x$ имеет вид $\sqrt[3]{1-x} = x$, оно равносильно уравнению $x^3 + x - 1 = 0$, которое, как можно показать, имеет единственный корень $x_0 \in (0; 1)$.

Уравнение $\varphi(\varphi(x)) = x$ имеет вид $\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}} = x$. Среди его корней есть числа 0 и 1, не являющиеся корнями уравнения $\varphi(x) = x$. Следовательно, для этой функции уравнения (А) и (Б) не равносильны.

Таким образом, для строго убывающей функции $\varphi(x)$ утверждение о равносильности уравнений (А) и (Б), аналогичное утверждению 2, вообще говоря, неверно.

Покажем, как можно применять утверждение 2 при решении уравнений.

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}+24} = x. \qquad (1)$$

Функция $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+24}$ строго возрастает на множестве **R,** и $\varphi(x_0) \in \mathbf{R}$ для любого $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда на основании утверждения 2 уравнение (1) равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{x+24} = x. \qquad (1')$$

Уравнение (1′) равносильно уравнению

$$x^3 - x - 24 = 0,$$

которое имеет единственный корень $x_1 = 3$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (1) также имеет единственный корень x_1.

Ответ. 3.

Отметим, что применение традиционного способа решения уравнения (1) — последовательное возведение в третью степень — приводит к уравнению девятой степени

$$x^9 - 72x^6 + 1728x^3 - x - 13848 = 0,$$

решение которого является более сложным, чем приведенное выше решение.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x-6}. \qquad (2)$$

Выполним равносильные преобразования уравнения (2):

$$\left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3 = 7x - 6,$$

$$\frac{\left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3 + 6}{7} = x. \qquad (2')$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{x^3+6}{7}$, она строго возрастает на множестве **R** и $\varphi(x_0) \in \mathbf{R}$ для любого $x_0 \in \mathbf{R}$. Уравнение (2′) имеет вид $\varphi(\varphi(x)) = x$, следовательно, по утверждению 2 оно равносильно уравнению $\varphi(x) = x$, т. е. уравнению $\frac{x^3+6}{7} = x$, которое имеет три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (2) имеет те же три корня.

Ответ. 1; 2; –3.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sqrt{\sqrt{|x|-1}+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}}=x. \qquad (3)$$

В силу определения квадратного корня получаем, что если уравнение (3) имеет корни, то они принадлежат множеству $X = \left[\frac{7}{4};\ +\infty\right)$. Поэтому далее будем рассматривать уравнение (3) на этом множестве. На нем уравнение (3) можно переписать в виде

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}\right)-1}+\frac{7}{4}=x. \qquad (3')$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sqrt{x-1}+\frac{7}{4}$ на множестве X. Ясно, что $\varphi(x)$ строго возрастает на этом множестве и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$. Так как уравнение (3′) можно записать в виде $\varphi(\varphi(x)) = x$, то на основании утверждения 2 уравнение (3′) равносильно на множестве X уравнению

$$\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}=x,$$

которое имеет единственный корень $x_1 = \frac{13}{4}$. Следовательно, и равносильное ему на множестве X уравнение (3) имеет единственный корень x_1.

Ответ. $\frac{13}{4}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$\sin(\sin x) = x. \qquad (4)$$

В силу того, что $|\sin\alpha| \le 1$, для любого α, получаем, что если уравнение (4) имеет корни, то эти корни принадлежат множеству $X = [-1;\ 1]$. На множестве X функция $\varphi(x) = \sin x$ строго возрастает и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$. Поэтому по утверждению 2 уравнение (4) равносильно на множестве X уравнению

$$\sin x = x,$$

которое имеет единственный корень $x_1 = 0$, принадлежащий множеству X. Следовательно, и равносильное ему на множестве X уравнение (4) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 0.

Пример 5. *Мехмат МГУ, 1974.* Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y \\ y^3+2y^2+2y=z \\ z^3+2z^2+2z=x. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(u) = u^3 + 2u^2 + 2u$, она определена на множестве **R** и все ее значения принадлежат **R**. Перепишем систему в виде $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\varphi(y) \\ x=\varphi(z) \end{cases}$ или, применяя метод подстановки, в виде

$$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\varphi(\varphi(x)) \\ x=\varphi(\varphi(\varphi(x))). \end{cases} \qquad (5')$$

Производная функции $\varphi(u)$ равна $3u^2 + 4u + 2$, она положительна для любых значений u, поэтому функция $\varphi(u)$ строго возрастает на множестве **R**. Следовательно, третье уравнение системы (5′) равносильно уравнению $\varphi(u) = x$, которое имеет вид

$$x^3 + 2x^2 + 2x = x. \qquad (5'')$$

Уравнение (5″) имеет только два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Теперь из системы (5) нетрудно найти два ее решения: (0; 0; 0) и (–1; –1; –1).

Ответ. (0; 0; 0); (–1; –1; –1).

Покажем, как можно применять утверждение 1 при решении уравнений.

Если функция $\varphi(x)$ не является строго возрастающей на множестве X, на котором ищутся корни уравнения (А), то для решения уравнения (А) нельзя применять утверждение 2. В этом случае иногда может помочь утверждение 1.

Из утверждения 1 следует, что все корни уравнения (Б) являются корнями уравнения (А). Поэтому, решив уравнение (Б), можно найти часть корней уравнения (А). Если уравнение (А) алгебраическое или может быть сведено к алгебраическому, то знание части его корней позволит записать алгебраическое уравнение в виде равенства нулю произведения многочленов, что, естественно, облегчит нахождение других корней уравнения (А). Покажем, как это делается на примерах.

Пример 6. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 5)^2 - 5(x^2 - 5x + 5) + 5 = x. \qquad (6)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(u) = x^2 - 5x + 5$, уравнение (6) имеет вид $\varphi(\varphi(x)) = x$. Функция $\varphi(x)$ определена на множестве **R** и $\varphi(x_0) \in$ **R** для любого $x_0 \in$ **R**, но эта функция не является на **R** строго возрастающей. Однако по утверждению 1 уравнение (6) имеет своими корнями все корни уравнения $\varphi(x) = x$, т. е. уравнения

$$x^2 - 5x + 5 = x. \qquad (6')$$

Уравнение (6′) имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Следовательно, уравнение (6) также имеет эти корни. Теперь перепишем уравнение (6) в виде $P_4(x) = 0$, где $P_4(x)$ — многочлен четвертой степени. Учитывая, что этот многочлен имеет два корня x_1 и x_2, разложим этот многочлен на множители. После чего уравнение (6) перепишем в виде:

$$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 4x + 1) = 0. \qquad (6'')$$

Уравнение (6″) и равносильное ему уравнение (6) имеют по четыре корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2 - \sqrt{3}$, $x_4 = 2 + \sqrt{3}$.

Ответ. 1; 5; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$.

Пример 7. Решим уравнение

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{6 - 2x}} = x. \qquad (7)$$

В силу определения квадратного корня получаем, что если уравнение (7) имеет корни, то все они принадлежат множеству $X = [0; 3]$. Поэтому далее будем рассматривать уравнение (7) на множестве X.

Рассмотрим на множестве X функцию $\varphi(x) = \sqrt{6 - 2x}$, тогда уравнение (7) имеет вид $\varphi(\varphi(x)) = x$. Ясно, что функция $\varphi(x)$ определена на множестве X и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, но эта функция строго убывает на множестве X. Поэтому для решения уравнения (7) нельзя применить утверждение 2.

По утверждению 1 все корни уравнения $\varphi(x) = x$, т. е. уравнения

$$\sqrt{6 - 2x} = x \qquad (7')$$

являются корнями уравнения (7). Решим уравнение (7′). На множестве X оно равносильно уравнению

$$x^2 + 2x - 6 = 0,$$

имеющему два корня $x_1 = -1 + \sqrt{7}$ и $x_2 = -1 - \sqrt{7}$. Из них лишь $x_1 \in$ X, поэтому лишь x_1 есть корень уравнения (7). Теперь, зная один корень уравнения (7), решим это уравнение. Уравнение (7) равносильно на множестве X уравнению

$$6 - x^2 = 2\sqrt{6 - 2x} \qquad (7'')$$

Все корни уравнения (7″) принадлежат множеству $X_1 = [0; \sqrt{6}]$, в частности $x_1 \in X_1$, где $X_1 \subset X$. На множестве X_1 уравнение (7″) равносильно уравнению

$$x^4 - 12x^2 + 8x + 12 = 0. \qquad (7''')$$

Так как все коэффициенты многочлена $P_4(x) = x^4 - 12x^2 + 8x + 12$ целые числа и он имеет корень $x_1 = -1 + \sqrt{7}$, то этот многочлен имеет также корень $x_2 = -1 - \sqrt{7}$. Следовательно,

$$P_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)\, P_2(x),$$

где $P_2(x)$ — многочлен второй степени. Так как $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 2x - 6$, то находим, что $P_4(x) = (x^2 + 2x - 6)(x^2 - 2x - 2)$. Следовательно, уравнение (7‴) можно переписать в виде

$$(x^2 + 2x - 6)(x^2 - 2x - 2) = 0.$$

Теперь можно найти все его корни: $x_1 = -1 + \sqrt{7}$, $x_2 = -1 - \sqrt{7}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$, $x_4 = 1 - \sqrt{3}$. Легко проверить, что из этих чисел только $x_1 \in X_1$. Но это означает, что уравнение (7) имеет единственный корень x_1.

Ответ. $-1 + \sqrt{7}$.

Отметим, что применение традиционного способа решения уравнения (7) — последовательное возведение уравнения в квадрат — привело бы к уравнению (7‴), равносильному на множестве X_1 уравнению (7). Но нахождение корней уравнения (7‴) без применения утверждения 1 представляется трудной задачей.

Сформулируем третье утверждение, доказательство которого почти дословно совпадает с доказательством утверждения 2.

Утверждение 3. Пусть функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X_1 и пусть множество X содержится в множестве X_1. Пусть $\varphi(x_0) \in X_1$ для любого $x_0 \in X$, тогда уравнения $\varphi(\varphi(x)) = x$ и $\varphi(x) = x$ равносильны на множестве X.

Пример 8. Найдем все корни уравнения

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) = x, \tag{8}$$

принадлежащие промежутку $X = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ на множестве X, на этом множестве функция $\varphi(x)$ строго возрастает, но $\operatorname{tg} x_0$ принадлежит множеству X не для каждого $x_0 \in$ X. Поэтому для решения уравнения (8) нельзя применить утверждение 2. Однако $\varphi(x_0) \in (-1; 1)$ для любого $x_0 \in X$, причем $X \subset (-1; 1)$. Функция $\varphi(x)$ строго возрастает на промежутке $X_1 = (-1; 1)$, поэтому по утверждению 3 уравнение (8) равносильно на множестве X уравнению

$$\operatorname{tg} x = x. \tag{8′}$$

Покажем, что уравнение (8′) имеет единственный корень $x_1 = 0$, принадлежащий множеству X. Очевидно, что число x_1 является корнем уравнения (8′).

Для каждого $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ справедливо неравенство $\operatorname{tg} x_0 > x_0$ (см. учебник алгебры и начал анализа для 10–11 классов), из которого следует, что нет числа $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, для которого выполнялось бы равенство $\operatorname{tg} x_0 = x_0$, т. е. уравнение (8′) не имеет корней на интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. В силу нечетности функций $\operatorname{tg} x$ и x, получаем, что уравнение (8′) не имеет корней и на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$. Следовательно, уравнение (8′) на множестве X действительно имеет единственный корень $x_1 = 0$. Но тогда и уравнение (8) имеет единственный корень $x_1 = 0$.

Ответ. 0.

Заметим, что с помощью утверждения 3 нельзя найти корни уравнения (8) на множестве $X = \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. Действительно, для любого $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ имеем $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x_0 < \sqrt{3}$, а функция $\operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ не является строго возрастающей (она даже не определена в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ этого промежутка).

Пример 9. При каждом неотрицательном значении параметра a решим уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x. \tag{9}$$

Обозначив $t = \sin x$, перепишем уравнение (9) в виде

$$\sqrt{a+\sqrt{a+t}} = t. \qquad (9')$$

Теперь для решения уравнения (9) надо найти решения уравнения (9′), принадлежащие промежутку $X = [0; 1]$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \sqrt{a+t}$. Эта функция строго возрастает на промежутке $X_1 = [-a; +\infty)$. Так как $a \ge 0$, то $X \subset X_1$. Кроме того, $\varphi(t_0) \in X_2 = [\sqrt{a}; \sqrt{a+1}]$ для каждого $t_0 \in X$, причем $X_2 \subset X_1$.

Уравнение (9) имеет вид $\varphi(\varphi(t)) = t$. По утверждению 3 оно равносильно на промежутке X уравнению $\varphi(t) = t$, т. е. уравнению

$$\sqrt{a+t} = t. \qquad (9'')$$

На промежутке X уравнение (9″) равносильно уравнению

$$t^2 - t - a = 0,$$

имеющему (для любого $a \ge 0$) два корня $t_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ и $t_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

При $a = 0$ имеем $t_1 = 1$ и $t_2 = 0$, причем $t_1 \in X$ и $t_2 \in X$. Следовательно, при $a = 0$ уравнение (9″), а значит и уравнение (9′) имеют на промежутке X по два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = 0$.

При любом $a > 0$ имеем $t_1 > 1$ и $t_2 < 0$, т. е. t_1 и t_2 не принадлежат промежутку X. Следовательно, при $a > 0$ уравнение (9″), а значит и уравнение (9′) не имеют корней на промежутке X.

Возвращаясь к уравнению (9), получим, что при любом $a > 0$ оно не имеет решений, а при $a = 0$ все его решения составляют объединение всех решений двух уравнений $\sin x = 0$ и $\sin x = 1$. Следовательно, при $a = 0$ уравнение (9) имеет две серии решений $x_k = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ и $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. Нет корней при $a > 0$, πk, $k \in \mathbf{Z}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ при $a = 0$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнение (**1 – 5**):

1. а) $(x^3 + 6)^3 + 6 = x$;

б) $(x^3 - 3x^2 + 3x)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 3x)^2 + 3(x^3 - 3x^2 + 3x) = x$.

2. а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+6} = x$; б) $\sqrt[5]{\sqrt[5]{x+30}+30} = x$; в) $\sqrt{\left(\sqrt{x^3-4}\right)^3-4} = x$.

3. $\sin^2(\sin^2 x) = x$.

4. а) $(x^2 - 11x + 11)^2 - 11(x^2 - 11x + 11) + 11 = x$;

б) $(x^2 - 2001x + 2001)^2 - 2001(x^2 - 2001x + 2001) + 2001 = x$;

5. *Мехмат МГУ, 1977.* Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0 \\ z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0 \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$

6. При каждом неотрицательном значении параметра a решите уравнение

$$\sqrt{a+2\sqrt{a+2\cos x}} = \cos x.$$

Ответы. 1. а) –2; б) 0; 1; 2. **2.** а) 2; б) 2; в) 2. **3.** 0. **4.** а) 1; 11; $5 - 2\sqrt{6}$; $5 + 2\sqrt{6}$; б) 1; 2001; $1000 - 3\sqrt{111111}$; $1000 + 3\sqrt{111111}$. **5.** (–1; –1; –1). **6.** Нет корней при $a > 0$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ при $a = 0$.

20.03.2003

с правкой 30.12.2009